

Società Italiana per il Progresso delle Scienze

COMITATO GLACIOLOGICO

ITALIANO

Castello del Valentino

TORINO

BOLLETTINO

del Comitato glaciologico italiano

(sotto gli auspici della S. I. P. S. e del C. A. I.)

Num. 6

ROMA

SOCIETÀ ITALIANA PER IL PROGRESSO DELLE SCIENZE

Via degli Staderari, 19

1925

Sul coefficiente di attrito interno del ghiaccio e la determinazione della profondità dei ghiacciai.

Prof. CARLO SOMIGLIANA.

La difficoltà di determinare direttamente la profondità dei ghiacciai mediante trapanazioni — come talvolta sono state tentate — ha fatto pensare alla possibilità di giungere a tali determinazioni per via indiretta, misurando qualche altro elemento più facilmente accessibile. La velocità superficiale si presenta subito come adatta a tale scopo, poichè risulta effettivamente maggiore, a parità delle altre circostanze, quanto maggiore lo spessore del ghiacciaio. Ma occorre naturalmente stabilire quali siano le relazioni precise che esistono fra le velocità che noi possiamo misurare in superficie e le profondità corrispondenti ai diversi punti nei quali le misure vengono eseguite.

Di tale quistione mi sono occupato in alcune Note pubblicate nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei⁽¹⁾ alcuni anni sono, nelle quali ho fatto vedere che, ammessa una certa schematizzazione del problema, è possibile arrivare alla determinazione del profilo di una sezione del ghiacciaio in base alla conoscenza della curva che rappresenta gli spostamenti, lungo la linea superficiale della sezione, in una data unità di tempo. Il problema risulta in tal modo risoluto, almeno teoricamente, in tutta la sua generalità.

Ma nelle formole compare una costante che è necessario conoscere sperimentalmente ed è quella che rappresenta il coefficiente di attrito interno del ghiaccio. Il Signor Weinberg⁽²⁾ ne ha tentata una determinazione diretta sperimentale, il che presenta notevoli difficoltà, tanto più che la costituzione globulare speciale del ghiaccio di ghiacciaio richiede che le esperienze siano fatte sul posto.

Ora una fortunata circostanza verificatasi durante le misure ese-

(1) CARLO SOMIGLIANA, *Sulla profondità dei ghiacciai*. « Rend. Acc. Lincei », Volume XXX, s. 5, 1921.

(2) BORIS WEINBERG, *Über den Koeffizienten der inneren Reibung der Gletschereises und seine Bedeutung für die Theorien der Gletscherbewegung*, « Zeitschrift für Gletscherkunde », Bd. I, 1906-7.

guite per cura della Commissione dei ghiacciai della Società elvetica di Scienze naturali sul ghiacciaio del Rodano, quella cioè della scomparsa del ghiacciaio in alcune regioni nelle quali erano state eseguite le misure di velocità, e della conseguente possibilità di

Fronte Ghiacciaio del Rodano

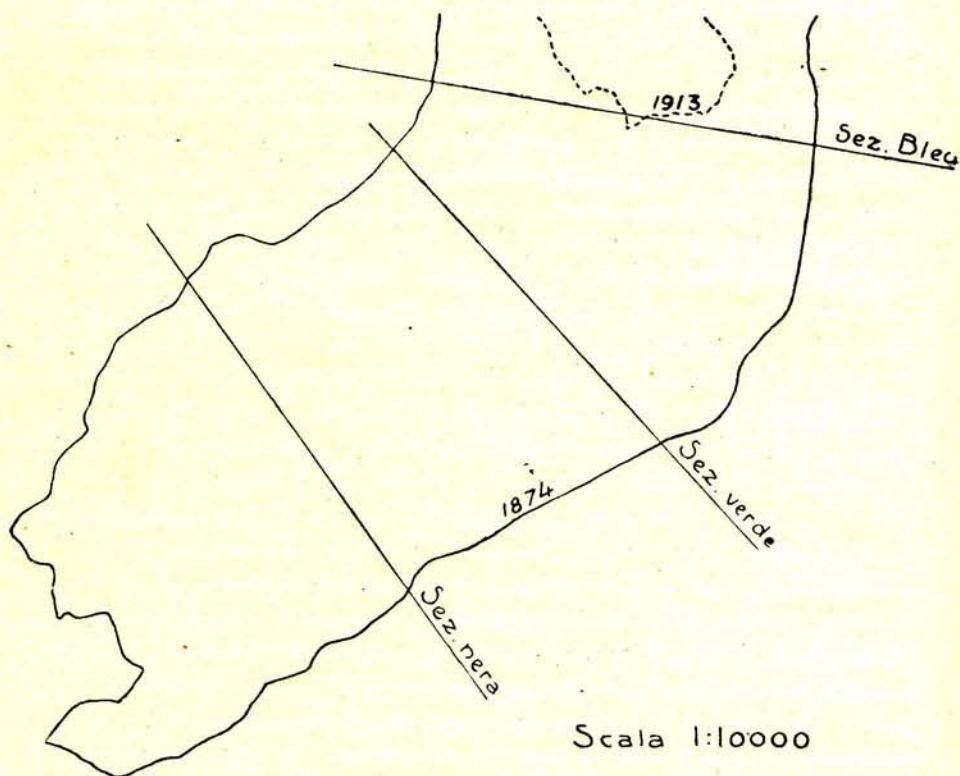


Figura 1.

un rilievo topografico diretto della sezione, permette, come ho già osservato nelle Note citate, una determinazione indiretta del coefficiente d'attrito interno.

Scopo di questo lavoro è appunto di utilizzare a tale scopo le misure di velocità superficiali ed i rilievi topografici eseguiti sul ghiacciaio del Rodano, durante il lungo periodo di osservazioni, circa un quarantennio, dal 1874 al 1915, colle quali la Società el-

vetica di scienze naturali ha reso un inestimabile servizio agli studi glaciologici (1).

I profili, che sono rimasti allo scoperto in seguito al ritiro del ghiacciaio, sono tre e sono chiamati nella Relazione del signor Prof. L. Mercanton rispettivamente *profilo nero*, *profilo verde*, e *profilo bleu*, dal colore applicato alle pietre indicatrici del movimento. Il profilo nero, più a valle, è rimasto interamente scoperto nel 1882 dopo otto anni di osservazioni; il secondo, profilo verde, nel 1887 dopo tredici anni di osservazione. Sul terzo, profilo bleu, la serie delle pietre per le osservazioni fu posta nel 1895; le misure degli spostamenti si poterono eseguire solo per tre anni. Esso rimase completamente scoperto nel 1910.

Riferiremo in seguito i valori degli spostamenti osservati, dei quali dovremo servirci. Per quanto riguarda la rappresentazione schematica dei profili, adotteremo la più semplice, assimilando tali profili ad una mezza ellisse. La forma dei profili, che riportiamo a pag. 18, dedotta dal Piano n. 6 della Relazione, giustifica abbastanza una tale supposizione.

La formola generale che dà la velocità u nei punti di un fluido vischioso, moventesi in un canale cilindrico inclinato, per effetto del suo peso, quando la sezione del canale sia semi-ellittica, con semi-assi L ed M , è la seguente:

$$u(y, z) = (v_0 - U) \left(1 - \frac{y^2}{L^2} - \frac{z^2}{M^2} \right) + U$$

nella quale l'asse delle z è supposto normale alla direzione del canale, quello delle y orizzontale, l'origine al centro dell'ellisse. Inoltre:

U è la velocità sul fondo, supposta costante.

v_0 la velocità superficiale al centro della ellisse.

L'equazione differenziale del movimento è la seguente

$$\mu \left(\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta z^2} \right) + \varrho g \sin \alpha = 0$$

nella quale:

μ è il coefficiente d'attrito interno del ghiaccio;

ϱ la densità del ghiaccio;

g l'accelerazione di gravità;

α l'inclinazione del canale sull'orizzante. Da questa equazione

(1) *Mensurations au Glacier du Rhône 1874-1915*. «Nouveaux Mémoires de la Société Helvétique de Sciences Naturelles», Vol. LII, 1916.

segue subito che dovrà essere verificata la relazione :

$$1) \quad 2 \mu (v_0 - U) \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} \right) = \varrho g \sin \alpha$$

È questa la formola ch'è premette di determinare μ quando siano noti: v_0 , U , L , U , ϱ , g , α . Oppure di determinare la profondità massima del canale M , quando siano noti i rimanenti elementi.

Relazioni analoghe, ma meno semplici, si hanno quando la sezione del canale anzichè ellittica, abbia una forma diversa. Nel caso ellittico dalla formola precedente (1) ricaviamo :

$$2) \quad \mu = \frac{1}{2} \frac{\varrho g \sin \alpha}{v_0 - U} \frac{L^2 M^2}{L^2 + M^2}$$

$$3) \quad \frac{1}{M^2} = \frac{\varrho g \sin \alpha}{2 \mu v_0} - \frac{1}{L^2}$$

Sono queste le formole delle quali ci serviremo per trovare i valori del coefficiente d'attrito μ , con gli elementi indicati; oppure per determinare la profondità M , quando si abbiano valori abbastanza attendibili per il coefficiente μ .

La velocità del ghiaccio sul fondo del ghiacciaio è stata dedotta dal Prof. Mercanton dalle osservazioni relative alle avanzate invernali sulla fronte del ghiacciaio e valutata a

$$m. 4,7 \pm 0,2$$

all'anno. Resterebbe, nel caso nostro, a vedersi se un tale valore possa accettarsi anche per le sezioni del ghiacciaio più a monte e ad una notevole distanza dalla fronte. Noi però non terremo conto di questa velocità di fondo, cioè supporremo $U=0$, e ciò per la seguente ragione. Nella teoria viene trascurata la pressione esercitantesi sulla sezione del ghiacciaio da parte delle masse a monte, pressione alla quale è probabilmente dovuto in gran parte lo slittamento sul fondo. Sembra quindi ragionevole supporre che un maggior avvicinamento alla realtà si possa ottenere, trascurando simultaneamente questi due fatti, di cui l'uno si può presumere conseguenza dell'altro.

Per quanto riguarda la densità del ghiaccio di ghiacciaio non esistono per quanto sappiamo determinazioni dirette. Per quanto riguarda la densità del ghiaccio ordinario si hanno molte determinazioni. Ne riportiamo alcune :

SCHLAGINWEIT: Pogg. Ann. 80, 1850, ghiaccio naturale	0,915
BUNSEN: Pogg. Ann. 141, 1870 ghiaccio artificiale. .	0,9167
NICHOLS: Phys. Rev. 8, 1899, ghiaccio naturale di stagno	0,918
LEDUC: Comptes rendu 1906, ghiaccio artificiale . .	0,9176

Ora il ghiaccio di ghiacciaio contenendo certamente una certa quantità di aria dovrà avere una densità piuttosto minore. Noi adotteremo il valore $\varrho = 0,9$.

Per la costante di gravità $g = 980 \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}^2}$

Notiamo poi che per quanto riguarda il problema della determinazione delle profondità, quando il coefficiente d'attrito sia stato determinato col metodo proposto, questa risulta indipendente dai valori di ϱ e di g . Infatti la eliminazione del coefficiente μ dalla formole (1) mediante una relazione analoga relativa ad una sezione di ghiacciaio per la quale siano noti tutti gli elementi, conduce anche alla eliminazione del prodotto ϱg . Supposto che siano v_0' , U_0 , L_0 , M_0 , α_0 , gli elementi relativi alla sezione conosciuta, per la quale ϱ , g si suppongono non differenti, si ha infatti dalla (1)

$$(v_0 - U) \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} \right) = (v_0' - U_0) \left(\frac{1}{L_0^2} + \frac{1}{M_0^2} \right)$$

e sarebbe in ultima analisi questa la relazione dalla quale si deve ricavare M , quando sono noti tutti gli altri elementi.

Una considerazione simile vale anche quando si assumono pel profilo rappresentazioni mediante curve più complicate della ellissi.

Per quanto riguarda la determinazione della inclinazione α si presenta subito una certa difficoltà, in quanto il canale glaciale naturale è ben lontano dalla forma cilindrica regolare.

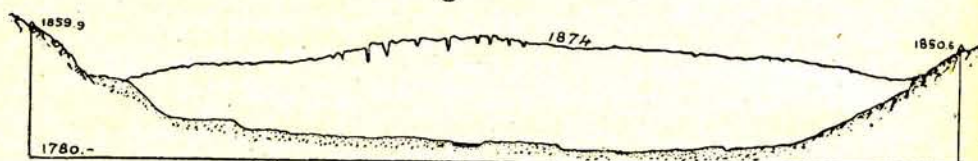
Nelle formole però per α può intendersi l'inclinazione corrispondente al piano della sezione che si considera. Per assegnare i corrispondenti valori numeri a questa costante, noi abbiamo assunto, come inclinazione corrispondente ad una sezione, l'inclinazione della retta che unisce il punto più basso delle sezione stessa col punto più basso della successiva a valle. Questi punti coincidono all'incirca coll'alveo della valle e la loro congiungente ne rappresenta quindi con sufficiente approssimazione la pendenza. Inoltre questo criterio è giustificato anche dal fatto che gli spostamenti sono misurati in senso discendente e noi abbiamo appunto, col procedimento indicato, la pendenza nello stesso senso rispetto al profilo.

Il tratto di canale glaciale che noi dobbiamo considerare risulta così diviso, per quanto riguarda la pendenza in tre regioni: la

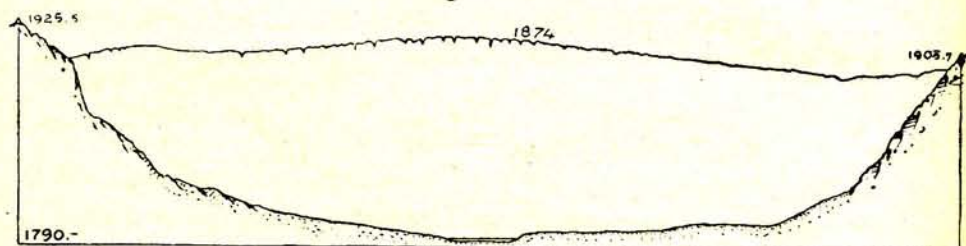
SEZIONI TRASVERSALI

SCALA 1:5000

Sezione nera.



Sezione verde.



Sezione bleu.

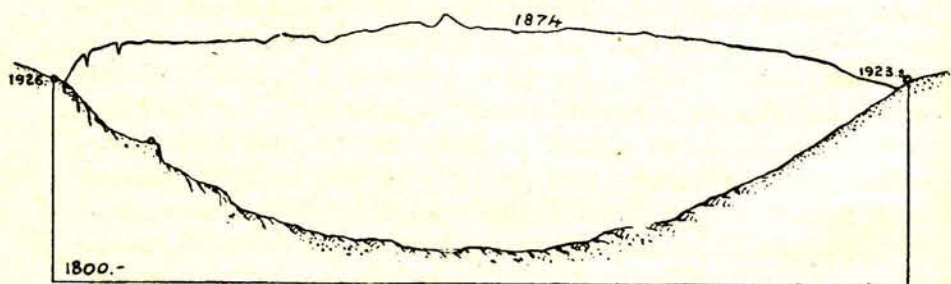


Figura 2.

prima fra il profilo bleu più elevato ed il verde; la seconda fra il profilo verde ed il nero; la terza fra il profilo nero ed un segnale

sul terreno (n. 4) che si trovava presso alla fronte all'epoca delle prime osservazioni.

La seguente tabella contiene i dati dai quali abbiamo dedotto i valore di α . (Plan N. 6°, N. 11 delle *Mensurations*).

REGIONE I.

Altitudine al fondo del profilo bleu . . .	m.	1823
» » » verde . . .	»	1798
Dislivello m. 25.		
Distanza dei due profili al centro . . .	»	270
Pendenza : $\text{tang} \alpha = 25/270 = 0,0925 = \text{sen} \alpha_1$		

REGIONE II.

Altitudine del profilo verde al fondo . . .	»	1798
» » nero » . . .	»	1788
Dislivello m. 10.		
Distanza dei due profili al centro . . .	»	354
Pendenza : $\text{tang} \alpha = 10/354 = 0,0282 = \text{sen} \alpha_2$		

REGIONE III.

Altitudine del profilo nero al fondo . . .	»	1788
» del segnale N. 4 . . .	»	1776,1
Dislivello : m. 11,9		
Distanza dal centro del profilo nero . . .	»	465
Pendenza : $\text{tang} \alpha = 11,9/465 = 0,0256 = \text{sen} \alpha_3$		

La determinazione dei semiassi delle ellissi che noi abbiamo assunto per rappresentare le tre sezioni non può ottenersi che secondo un criterio di approssimazione, data la forma non perfettamente regolare delle sezioni stesse ed il fatto che la superficie libera non è piana, ma presenta una certa convessità verso l'alto, come avviene in tutti i ghiacciai.

Per considerazioni che vedremo in seguito, abbiamo dovuto prendere in esame i valori delle velocità corrispondenti ai soli primi anni di osservazione, ed in conformità abbiamo assunto come diametro orizzontale dell'ellisse la distanza fra i punti estremi di contatto fra ghiaccio e terreno nell'epoca delle osservazioni. Come semi-diametro verticale abbiamo preso lo spessore della massa glaciale alla stessa epoca. Ne risultano così delle semi-ellissi che corrispon-

dono anche come area alla sezione vera, ed hanno un semi-diametro uguale allo spessore vero.

I valori così determinati mediante misure dalle figure del *Plan* N. 6, riprodotte nella Tav. II, sono i seguenti. Chiamiamo L il semi diametro orizzontale, M quello verticale.

Profilo bleu . . .	L = m. 244	M = m. 78
» verde . . .	L = m. 268	M = m. 118
» nero . . .	L = m. 241	M = m. 65

Nella formola (1) il valore v_0 rappresenta la velocità al centro dell'ellisse, che è anche il valore massimo superficiale. Per dedurre dalle osservazioni questo valore di v_0 da introdurre nelle formole, abbiamo preso in considerazione i seguenti valori degli spostamenti superficiali, dati dalle tabelle XXXVI, e XXVII, e XLVI, delle *Mensurations* (pag. 116-117, 120-121, 134-135). Essi rappresentano spostamenti orizzontali, in metri, osservati nei periodi di tempo indicati, delle piccole pietre collocate in prossimità dalle altre più grandi numerizzate coi numeri che vengono trascritti. Queste piccole pietre hanno dato risultati più attendibili, perchè esse erano meno soggette a scivolamenti.

PROFILO NERO — Posa della catena di pietre: 12 Settembre 1874. Scomparsa nel 1882

	Giorni	N. 12 (m. 259)	N. 13 (m. 239)	N. 14 (m. 239)	M
2 Sett. 1875	355	10.5	10	11	—
3 Sett. 1876	366	10	11	10	50
1 Ott. 1877	393	11	12	9	39

PROFILO VERDE — Posa della catena di pietre: 3 Settembre 1874. Scomparsa nel 1887

	Giorni	N. 12 (m. 296)	N. 13 (m. 276)	N. 14 (m. 257)
3 Sett. 1875	365	33	34	34
3 Sett. 1876	365	35	33	32
1 Ott. 1877	393	33	31	31

PROFILO BLEU — Posa della catena: 30 agosto 1895. Scomparsa nel 1910

	Giorni	N. 3 (m. 295)	N. 4 (m. 334)	N. 5 (m. 376)	N. 6 (m. 415)
24 Agosto 1896	360	41	46	49	45
24 Agosto 1897	365	41.5	46.5	50	45.5

I numeri segnati dentro parentesi indicano la distanza delle pietre corrispondenti dal bordo sinistro pei profili nero e verde e dal bordo destro pel profilo nero.

Dei valori degli spostamenti superficiali riferiti nelle Tabelle delle *Mensurations* abbiamo riportato soltanto quelle riguardanti i primi anni d'osservazione pei primi due profili e ci fondiamo su questi per dedurre i corrispondenti valori di v_0 , poichè i successivi valori, mentre corrispondono a spessori del ghiacciaio notevolmente minori, conservano differenze molto piccole dai primi, e si è quindi condotti a pensare a qualche eventuale causa d'errore, probabilmente scivolamenti per aumentata pendenza superficiale.

In base a queste considerazioni adotteremo pel profilo nero come spostamento centrale quello medio corrispondente alle pietre N. 12, 13, 14 nei primi due anni di osservazione. Abbiamo così.

$$v_0 = \frac{1}{3} \frac{62,5}{721} \frac{\text{m.}}{\text{giorno}} = 2,889 \frac{\text{cm.}}{\text{giorno}}$$

Per il profilo verde è manifesto un valore massimo per le pietre N. 13, 14, di m. 34 per anno. Abbiamo quindi,

$$v_0 = \frac{34}{365} \frac{\text{m.}}{\text{giorno}} = 9,315 \frac{\text{cm.}}{\text{giorno}}$$

Pel profilo bleu è manifesta una velocità massima per la pietra N. 15. Adottando per v_0 la velocità media di questa pietra per tutto il periodo di osservazione, si ha

$$v_0 = \frac{99}{721} \frac{\text{m.}}{\text{giorno}} = 13,655 \frac{\text{cm.}}{\text{giorno}}$$

Prendendo per unità di tempo il secondo e quindi dividendo i numeri precedenti per 864×10^2 troviamo i seguenti valori

$$\text{Profilo nero } v_0 = 33,436 \times 10^{-6} \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$$

$$\text{Profilo verde } v_0 = 107,81 \times 10^{-6} \quad »$$

$$\text{Profilo nero } v_0 = 158,043 \times 19^{-6} \quad »$$

Poniamo per semplicità

$$H = \frac{M^2 L^2}{L^2 + M^2} = \frac{M^2}{1 + \frac{M^2}{L^2}}$$

Coi dati precedenti è allora facile stabilire la seguente tabella di valori

	$\frac{M}{L}$	H 10^7 cm.^2	v_0^{-1} $10^3 \frac{\text{sec.}}{\text{cm.}}$	$\frac{1}{2} \rho g \sin. \alpha$
Profilo nero .	0,269	3,939	29,907	11,289
Profilo verde	11,671	9,275	9,275	12,436
Profilo bleu .	5,520	6,328	6,328	40,592

In base alla formola (1), nella quale si supponga $U = 0$, il valore di μ sarà dato dal prodotto dei tre numeri delle ultime colonne della tabella precedente appartenenti ad una stessa linea si trova così :

$$\text{Profilo nero } \mu = 1,329 \times 10^{13}$$

$$\text{Profilo verde } \mu = 1,346 \times 10^{13}$$

$$\text{Profilo bleu } \mu = 1,417 \times 10^{13}$$

La concordanza fra questi tre valori così ottenuti supera quanto si può pretendere in determinazioni del genere che abbiamo studiato, poichè un certo grado di incertezza resta sempre nei dati d'osservazione. Però anche variando questi dati in base a presupposti un poco differenti da quelli da noi usati, si ottengono variazioni poco notevoli. Credo superfluo riferire i calcoli relativi, ma si può in generale concludere che il coefficiente d'attrito μ resta compreso fra i limiti

$$1,25 \times 10^{13} \text{ e } 1,45 \times 10^{13}$$

Vedremo fra poco che anche ammettendo una incertezza compresa fra questi limiti i valori della profondità che se ne possono dedurre non hanno fra loro una differenza molto grande, o almeno non superiore alle differenze che si possano prevedere in questo genere di determinazioni.

Osserviamo intanto che dai valori precedenti ricaviamo come valore medio del coefficiente d'attrito pel ghiaccio di ghiacciaio il valore

$$\mu = (1,364 \pm 0,053) \times 10^{13} \frac{\text{gr.}}{\text{cm. sec.}}$$

che possiamo ritenere abbastanza attendibile. Il Sig. Weinberg nel citato lavoro, con due diversi metodi, aveva trovato i valori

$$\begin{aligned} \mu &= (1,74 \pm 1,10) \times 10^{13} \\ \mu &= (1,67 \pm 0,95) \times 10^{13} \end{aligned}$$

In *Mensurations* (pag. 125) è riferito per μ il valore

$$2,5 \times 10^{13}$$

ed è attribuito a Weinberg. Non sappiamo quale possa essere l'origine di questo dato.

Misure eseguite dal D. U. Monterin al ghiacciaio del Lys nella valle di Gressoney negli anni 1921-22-23, gli hanno dato i seguenti valori per la velocità massima superficiale, che si verifica all'incirca sulla morena mediana destra di quel ghiacciaio

$$\begin{array}{ll} 1921-22 & v_0 = \frac{66,30}{321} = 20,20 \frac{\text{cm.}}{\text{giorno}} \\ 1922-23 & v_0 = \frac{63,00}{349} = 18,05 \frac{\text{cm.}}{\text{giorno}} \end{array}$$

I rimanenti dati che si hanno per quel ghiacciaio in corrispondenza alla sezione ove furono eseguite le misure sono

$$L = \text{m. } 357 \quad \text{sen } \alpha = 0,115$$

Applichiamo ora la formola (3)

$$\frac{1}{M^2} = \frac{g \text{ sen } \alpha}{2 \mu v_0} - \frac{1}{L^2}$$

per trovare M , che sarà un valore approssimato per la profondità massima di quel ghiacciaio.

Assumeremo per v_0 la media dei due valori precedenti

$$v_0 = \frac{1}{2} (20,20 + 18,05) = 19,12 \frac{\text{cm.}}{\text{giorno}}$$

ossia

$$v_0 = 2,213 \times 10^{-4} \frac{\text{cm.}}{\text{sec.}}$$

Inoltre

$$\varrho g \sin \alpha = 101,871 \quad \frac{1}{L^2} = 7,84 \times 10^{-10}$$

Prendendo per μ i tre valori precedentemente trovati, troviamo rispettivamente

$$\begin{aligned} 2 \mu v_0 &= 4,426 \times 1,329 \times 10^9 = 5,886 \times 10^9 \\ 2 \mu v_0 &= 4,426 \times 1,346 \times 10^9 = 5,952 \times 10^9 \\ 2 \mu v_0 &= 4,426 \times 1,417 \times 10^9 = 6,271 \times 10^9 \end{aligned}$$

e successivamente

$$\begin{aligned} \frac{\varrho g \sin \alpha}{2 \mu v_0} &= \frac{101,871}{5,886} \times 10^{-9} = 17,307 \times 10^{-10} \\ &= \frac{101,891}{5,957} \times 10^{-9} = 17,111 \times 10^{-10} \\ &= \frac{101,891}{6,271} \times 10^{-9} = 16,244 \times 10^{-10} \end{aligned}$$

Ne segue

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varrho g \sin \alpha}{2 \mu v_0} - \frac{1}{L^2} &= 165,23 \times 10^{-10} \\ &= 163,27 \times 10^{-10} \\ &= 154,60 \times 10^{-10} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{M^2}$$

Ne seguono per $\lg M$ i seguenti valori

$$\begin{aligned} \log M &= 3,8909555 \\ &= 3,8935468 \\ &= 3,9053952 \end{aligned}$$

da cui

$$M = \text{m. } 77,92; \text{ m. } 78,26; \text{ m. } 80,32$$

con uno scarto fra il massimo ed il minimo valore di m. 2,40.
Il valor medio dà

$$M = m. 78,83 \pm 1,59$$

con un incertezza del 2 % circa.

Intorno ai risultati raggiunti in questo lavoro si può osservare che per quanto riguarda gli elementi fondamentali su cui i calcoli sono fondati, come la inclinazione, le distanze fra l'una e l'altra sezione, e così via, vi è una certa arbitrarietà di determinazione. Noi abbiamo scelti quelli che ci sembravano più attendibili. Però anche facendo variare questi dati, nei limiti entro cui possano essere compresi, non si avrebbero risultati molto differenti.
